EXERCICE N°1 : | **PRINCIPALE** | **50'** | **6,5 points**

1°) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=x-1+x\ln x$$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
h	$\|\|$	-1	$\searrow$	$-(1+e^{-2})$	$\nearrow$ $+\infty$

a) Calculer $h(1)$.

b) Déterminer le signe de la fonction h sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+(x-1)\ln x$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4°) a) Résoudre dans $]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=x$.

b) Montrer que $f(x)\leq x$ si et seulement si $x\in[1,e]$.

c) Déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta: y=x$.

5°) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

6°) Soit $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a) Par une intégration par partie montrer que $\int_1^e (x\ln x)dx=\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$.

b) Calculer alors $\mathscr{A}$.

7°) On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$, $u_n\in[1,e]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn